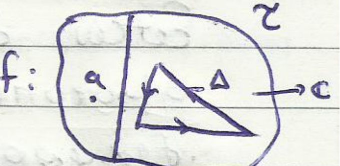
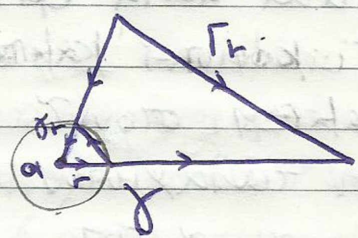
Για το Θεώρημα Goursat έχουμε τις περιπτώσεις:

1) $\alpha \notin \Delta \Rightarrow f$ ολόμορφη $\Rightarrow \int_\gamma f(w)\,dw = 0$



2) α είναι κορυφή



$\gamma = \gamma_r + \Gamma_r$, r: μήκος

Τότε ισχύει:

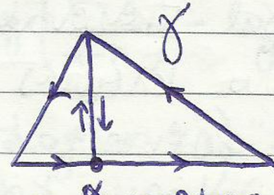
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \cancel{\int_{\Gamma_r} f(z)\,dz}^{\,0} + \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \int_{\gamma_r} f(z)\,dz$$

α είναι τοπικό φράγμα, έτσι:

$$\left|\int_\gamma f(w)\,dw\right| = \left|\int_{\gamma_r} f(w)\,dw\right| \overset{op.}{\le} \left|\int_{\gamma_r} M\,dw\right| = 4rM \Rightarrow$$

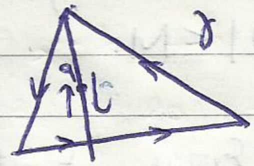
$$\Rightarrow \left|\int_\gamma f(w)\,dw\right| = 0 \Rightarrow \int_\gamma f(w)\,dw = 0$$

3) α σημείο μιας πλευράς



Ενώνουμε το α με την απέναντι κορυφή έχουμε δύο τρίγωνα όπου ο [illegible] α κορυφή οποτε πάλι $\int_\gamma f(w)\,dw = 0$

4) α στο εσωτερικό του Δ



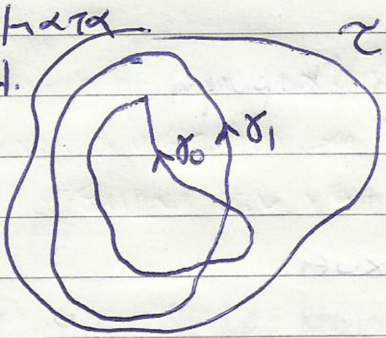
φέρνουμε από την μια κορυφή (οποια θέλουμε) μια ημιευθεία και έτσι αναγόμαστε στην 3η περίπτωση όπου αναγόμαστε στην 2η περίπτωση (αφού α σε πλευρά). Τότε το α θα είναι κορυφή των δυο τριγώνων που θα προκύψουν

άρα $\int_\gamma f(w)\,dw = 0$

Άρα, σε καμία των περιπτώσεων δεν μας επηρεάζει το γεγονός ότι η f δεν είναι ολόμορφη στο α.
Επαγωγικά και για πεπερασμένο πλήθος σημείων που η f δεν είναι ολόμορφη

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΟΜΟΤΟΠΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ)

Έστω δύο καμπύλες γ_0, γ_1 σε ένα τόπο τ ομοτοπικές και κατά τμήματα διαφορίσιμες κλειστές καμπύλ. και f ορισμένη στον τ και ολόμορφη τουλάχιστον στον $\tau\setminus\{a\}$ και α τοπ. φράγμα της f τότε:

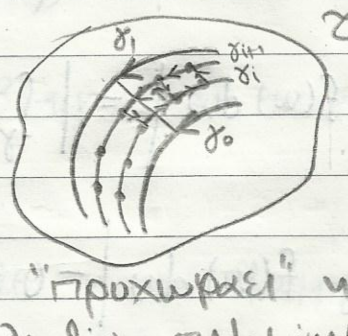


$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

Απόδ (ΙΔΕΑ)

Έστω $H : [0,1]\times[\alpha,\beta] \to \tau$

$H(0,s) = z_0(s)$
$H(1,s) = z_1(s)$, $s\in[\alpha,\beta]$



σε κάθε μια κατάσταση που "προχωράει" η γ_0 στην γ_1 παίρνουμε μια ακολουθία σημείων φτιάχνω κλειστές καμπύλες ενώνοντας κάθε σημείο με το "απέναντι" στις γ_i και γ_{i+1}

Η f ολόμορφη κατά μήκος των $\Delta_{i,k} \to \int_{\Delta_{ik}} f = 0$

και θα προκύψει $\int_{\gamma_{i+1}} f = \int_{\gamma_i} f \Rightarrow \int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Εαν γ κατά τμήματα διαφορίσιμη κλειστή καμπύλη μηδενομοτοπική ($\gamma \simeq 0$) σε εναν τοπο Υ και f ολομορφη στον $\Upsilon \setminus \{a\}$, $a \in \Upsilon$. Αν f τοπ. φραγμ. απο το a τοτε:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

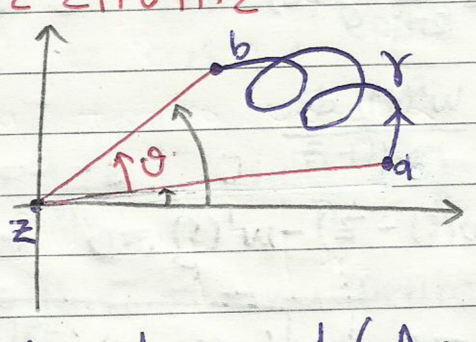
Εστω Υ απλά συνεκτικος τοπος στο $\mathbb{C}$ και a σημειο του Υ. Αν f συνεχής και ολομορφη στον $\Upsilon \setminus \{a\}$ και τοπ. φραγμ. απο το a, τοτε:

$\int_\gamma f(z)dz = 0$ για κάθε κατά τμήματα κλειστή καμπυλη

ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Εστω Υ τοπος, f συναρτηση οριςμενη στον Υ. Αν f ολόμορφη σε κάθε σημειο του $\Upsilon \setminus \{a\}$, $a \in \Upsilon$, με f τοπ. φραγμ. τοτε f ολόμορφη.

ΔΕΙΚΤΗΣ ΣΤΡΟΦΗΣ



Ορίζουμε το πηλίκο $I(\gamma, z) =: \frac{\theta}{2\pi}$ τον δείκτη στροφης της καμπύλης γ ως προς το z

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi}\theta = \frac{1}{2\pi}\left(Arg(b-z) - Arg(a-z)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[i\,Arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right)\right] = \frac{1}{2\pi i}\left[Log\left(\frac{b-z}{a-z}\right) - \log\left|\frac{b-z}{a-z}\right|\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{|a-z|}{|b-z|} + Log(b-z) - Log(a-z)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\log \frac{|\alpha - z|}{|b-z|} + \int_\gamma \frac{dw}{w-z} \right)$$

Εαν η καμπύλη είναι κλειστή τοτε $\alpha = b \Rightarrow$
$\Rightarrow |\alpha - z| = |b - z|$ τοτε $\log \frac{|\alpha - z|}{|b-z|} = \log 1 = 0$
Αρα, αν η καμπυλη είναι κλειστή

$$I(\gamma, z) =: \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z} \quad \text{οπου } z \notin \gamma$$

Εαν $C = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ αλυσίδα καμπυλων και $z \notin \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ τοτε:

$$I(c, z) =: \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{k} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

Τελος, αν $z \notin \gamma$ και πιο συγκεκριμενα εκτός της καμπύλης γ τοτε προφανως $I(z, \gamma) = 0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1) Ο δεικτης στροφης $I(\gamma, z)$ κλειστης καμπυλης γ ως προς τυχον $z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ είναι ακεραιος αριθμος
2) Η συναρτηση $z \xrightarrow{\varphi} I(\gamma, z)$ είναι συνεχης

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1) Εστω $(\gamma): w = w(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{w'(t)\,dt}{w(t) - z} = \frac{1}{2\pi i} g(\beta) \quad ①$$

Εστω λοιπόν $g(s) = \int_\alpha^s \frac{w'(t)\,dt}{w(t) - z}$

$$g'(s) = \frac{w'(s)}{w(s) - z} \Leftrightarrow g'(s)(w(s) - z) - w'(s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((w(s) - z) e^{-g(s)} \right)' = 0 \Leftrightarrow \boxed{(w(s) - z) e^{-g(s)} = c}$$

Τοτε $(w(\beta) - z) e^{-g(\beta)} = (w(\alpha) - z) e^{-g(\alpha)} \overset{g(\alpha)=1}{=\!=} w(\alpha) - z$

$\xrightarrow[\text{αφου κλειστη}]{w(\alpha) = w(\beta)} e^{-g(\beta)} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -g(\beta) = \log(1) = \log|1| + i \arg(1) = i2k\pi$.

Τοτε η ① γίνεται : $I(\gamma, z) = -k \in \mathbb{Z}$

2) Προκυπτει άμεσα απο θεωρημα 5.3.5

Ετσι προκυπτει το συμπερασμα:

"Η τιμη της συναρτησης $\varphi: z \to I(\gamma, z)$ πανω σε καθε συνεκτικη συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \gamma$ είναι σταθ. ακεραιος

ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 4.186 (Σελ. 151)

Ν.δ.ο δεν συγκλινει η σειρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$$

ΛΥΣΗ

$$e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$$

Ετσι, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} = \cos\pi + \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} = -1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} \quad (1)$$

$n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow$ είμαστε στο 1º τεταρτ., οπου

το συνημίτονο είναι θετικο.

Ετσι, $\displaystyle\frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{3} \xRightarrow{\cos\downarrow} \cos\frac{\pi}{n} \geq \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Ετσι η (1) γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} = -1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} \geq -1 + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

→ αρμονική σειρα ταξης 1

Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} = +\infty$

Παράδειγμα 5.2.1 (σελ. 167).

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma (z+\sqrt{z})\,dz$$

όπου γ: άνω τμήμα του μοναδιαίου κύκλου με θετική φορά και όπου $\sqrt{z}$ ο κλάδος της τετραγωνικής ρίζας του z για το οποίο ισχύει $\sqrt{1} = -1$

ΛΥΣΗ

$(\gamma): z(t) = \cos t + i\sin t = e^{it}, \quad t \in [0,\pi]$

$$\sqrt{z} = \begin{cases} z_0 \\ z_1 \end{cases} \Bigg| \begin{aligned} & z_k = \cos\frac{t+2k\pi}{2} + i\sin\frac{t+2k\pi}{2}, \quad k=0,1 \\ & z_0 = \cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2} = e^{it/2} \\ & z_1 = \cos\left(\frac{t}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{t}{2}+\pi\right) = e^{i\left(\frac{t}{2}+\pi\right)} = e^{\frac{t}{2}} e^{i\pi} = \underline{-e^{t/2}} \end{aligned}$$

(*)

$\sqrt{1} = -1$ → δηλ. θέλουμε όταν $z=1$ να πάρω τον κλάδο 1

άρα $z=1$ όταν $t=0 \rightsquigarrow z_0(0)=1$

και όταν $t=0 \rightsquigarrow \boxed{z_1(0) = -1}$ ← Αυτό θέλω λόγω της σχέσης (*)

άρα όπου $\sqrt{z}$ θα αντικαταστήσουμε το z_1

Επομένως,

$$\int_\gamma (z+\sqrt{z})\,dz = \int_0^\pi \left(e^{it} - e^{i\frac{t}{2}}\right)\left(ie^{it}\right)dt =$$

$$= i\int_\gamma \left(e^{2it} - e^{i3t/2}\right)dt = \cancel{i}\left(\frac{e^{2it}}{2\cancel{i}} - \frac{e^{\frac{i3t}{2}}}{\cancel{i}\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{2i}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(i+1)$$

Παράδειγμα 5.3.2 (σελ. 173)

Ποιο το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma (z^2+3z+2)\,dz$$

οπου γ: το ευθ. τμήμα που ενώνει τα $1-i$, με το $-1+2i$

ΛΥΣΗ

Εστω $F(z)=\frac{z^3}{3}+3\frac{z^2}{2}+2z$ ώστε $F'(z)=f(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$

απο θεώρημα Newton-Leibnitz (πληρούνται οι υποθέσεις)

$$\int_\gamma (z^3+3z+2)\,dz = F(-1+2i)-F(1-i)=$$

$$= \frac{(-1+2i)^3}{3}+3\frac{(-1+2i)^2}{2}+2(-1+2i)-\frac{(1-i)^3}{3}-3\frac{(1-i)^2}{2}-2(1-i)=$$

$$= -\frac{25}{6}+3i$$